Centre Universitaire
MAYOTTE

Département Sciences

- Licence de MIPS
- Licence GBE

Annales des sujets d'examens

Session 2

Année universitaire 2016-2017

Centre Universitaire de Mayotte route nationale 3 BP.53 97660 DEMBENI

Tél : 02 69 61 08 92

www.univ-mayotte.fr

Centre Universitaire
MAYOTTE

Département Sciences

Table des matières

MG p 1

- L1 semestre 1 p 2 à 18
- L1 semestre 2 p 19 à 21
- L2 semestre 3 p 22 à 28
- L2 semestre 4 p 29 à 41
- L3 semestre 5 p 42 à 47
- L3 semestre 6 p 48 à 53

SV p 54

- L1 semestre 1 p 56 à 67
- L1 semestre 2 p 68 à 71
- L2 semestre 3 p 72 à 90
- L2 semestre 4 p 91 à 105

Année universitaire 2016-2017

MG

Centre Universitaire
MAYOTTE

LICENCE 1 MG

Examen MG 104

Année universitaire 2016/2017 – Semestre 1 – 2ème session

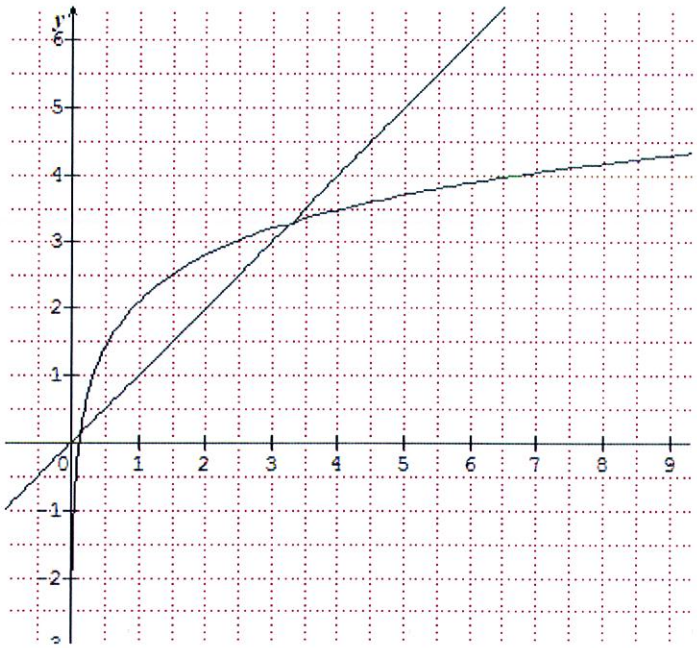
Aucun document n'est autorisé.
La calculatrice programmable est autorisée.

Ex 1
Soit un triangle quelconque ABC.
On donne AC = 8 cm ; AB = 6 cm. La mesure de l'angle Â est égale à 27 °.
Calculer BC, et les mesures des deux autres angles du triangle. Calculer l'aire du triangle ABC en cm². On arrondira tous les résultats à 0,1 près.

Ex 2
Soit un triangle quelconque ABC.
On donne AC = 9 cm. La mesure de l'angle Â est égale à 31 °. La mesure de l'angle $\hat{B}$ est égale à 36 °.

Calculer BC, AB et la mesure de l'angle $\hat{C}$. Calculer l'aire du triangle ABC en cm². On arrondira tous les résultats à 0,1 près.

Ex 3
On souhaite résoudre l'équation (E) dans ℝ : $Ln\,(3x) + 1 - x = 0$
1) On considère la fonction f définie sur $]1\,;\,+\infty[$ $par\ f(x) = Ln\,(3x) + 1 - x$. En utilisant la fonction f montrer que (E) admet une solution unique α dans $]1\,;\,+\infty[$. Montrer que α vérifie $Ln\,(3\alpha) + 1 = \alpha$
2) Soit la suite (U_n) définie par $\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = Ln\,(3U_n) + 1$.
En utilisant la représentation graphique ci-dessous, construire les trois premiers termes de la suite (U_n).



3) Montrer que la suite (U_n) est croissante et majorée par 4.

4) Montrer que la suite (U_n) converge vers α.

5) En utilisant la calculatrice, donner une valeur approchée de α à 0,01 près par défaut.

Centre Universitaire
MAYOTTE

LICENCE 1 MG

Examen MG 101

Année universitaire 2016/2017 – Semestre 1 – 2ème session

Durée de l'épreuve : 2 heures
Aucun document n'est autorisé.
La calculatrice programmable est autorisée.

Ex 1 :
Soient f et g deux fonctions que l'on peut composer.
Montrer que si f et g sont injectives alors gof est injective.

Ex 2:
Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Calculer si c'est possible, la matrice A^{-1} **en utilisant les opérations élémentaires sur les lignes.**
NB : On écrira les opérations réalisées sur les lignes à gauche de la matrice obtenue.

Ex 3 :
Résoudre **en utilisant les opérations élémentaires sur les lignes** le système suivant :

$$\begin{cases} x + 3y + 3z = 1 \\ 3x + 5y + 3z = 2 \\ x + 2y + z = 4 \end{cases}$$

Ex 4
Trouver une représentation paramétrique de la droite D passant par A (1 ; 2 ; 3) et de vecteur directeur U (-2 ; 3 ; 1)

Ex 5
Trouver une équation cartésienne du plan P1 défini par le vecteur normal N (-1 ; 2 ; -3) et passant par le point A (1 ; 2 ; 3).

Ex 6
Trouver une représentation paramétrique du plan P2 contenant le point B (-1 ; 4 ; 2) et de vecteurs directeurs U (-2 ; 3 ; 1) et V (1 ; 1 ; 2).
Trouver les coordonnées d'un vecteur normal au plan P2.
Trouver alors une équation cartésienne du plan P2.

Ex 7
Calculer la distance entre le point E (1 ; -4 ; 5) et le plan P4 dont une équation est
$2X + 3Y - 5Z - 1 = 0$

Ex 8
Trouver les coordonnées du point d'intersection (éventuel) entre la droite passant par F (1 ; -1 ; 1) et de vecteur directeur W (2 ; 2 ; -1) et le plan P4 dont une équation est
$2X + 3Y - 5Z - 1 = 0$

Ex 9
Calculer en radians l'angle (U ; V) avec U (-2 ; 3 ; 1) et V (1 ; 1 ; 2).

Centre Universitaire
MAYOTTE

N° DE L'ETUDIANT :
.....
.....

MG102

« INTRODUCTION A L'ALGORITHMIQUE ET A LA PROGRAMMATION »

Rattrapage Juin 2017 - SUJET

1 heure 15 mn ; ni document ni calculatrice autorisé ; répondre sur ce sujet

Exercice 1

Que renvoie l'algorithme suivant ? quel est son but ?

Algorithme : mystere
Données : a : Nombre, b : Nombre, x : Nombre
Résultat : Nombre, ???

Le résultat est : si abs(a-x) ≤ abs(b-x) **alors** a **sinon** b
fin algorithme

Exercice 2

Ecrivez l'algorithme (récursif) permettant de calculer la suite suivante au rang n (attention, elle débute à n=1, n est un entier naturel strictement positif et non nul):

$$Un = (1^2-(1/2)) + (2^2-(4/3)) + (3^2-(6/4)) + (4^2-(8/5)) + \ldots + (n^2-(n*2/(n+1)))$$

ALGORITHME : sommeCarrésModifiées

Rappels :

- Attention à la syntaxe
- Pensez au cas de base
- Pensez à la récurrence et à l'appel récursif, pour cela prenez le temps d'analyser (Un)

Centre Universitaire
MAYOTTE

N° DE L'ETUDIANT :

.....

.....

Exercice 3

Écrire l'algorithme nbOccListe2 qui étant donnés un entier n, et une liste d'entiers li compte le nombre de fois où l'on trouve le carré de n dans la liste li.

ALGORITHME : nbOccListe2

Licence L1 Mathématiques générales

UE-MG 103 : Physique générale

Session de rattrapage (juin 2017). Durée : 2 heures

Exercice 1 :

Afin d'accéder à la vitesse v d'un mobile sur une table à coussin d'air, un étudiant mesure la distance d parcourue durant un intervalle de temps t : d =5,10 ± 0,01 m et t =6,02 ± 0,02 s . Les incertitudes sont indépendantes.

1. Que valent v=d /t et son incertitude Δv? :

vous calculerez v et Δv :

a) en calculant v pour les valeurs maximum et minimum de d et de t ;

b) par la règle de propagation des incertitudes

2. Si la masse du mobile est m=0,711± 0,002 kg , quelle valeur prend la quantité de mouvement $p = mv = m\frac{d}{t}$?

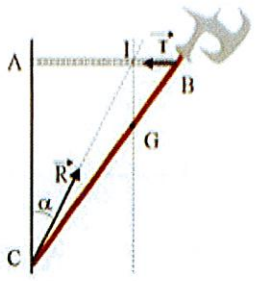
Exercice 2

Une hallebarde (sorte de longue hache moyenâgeuse) de masse m est exposée dans un musée comme le montre la figure suivante. Elle est appuyée contre le mur en C et est retenue par une chaîne (AB) dont on supposera la masse négligeable.

G est le centre de gravité de la hallebarde, R est la réaction du mur , T est la tension de la chaîne

P désigne le poids de la hallebarde. g désigne l'accélération de pesanteur .

Les seules forces à considérer sont P, R, T



a) Représentez le poids de la hallebarde

b) Donnez l'expression de la longueur AC en fonction de AB et BC.

c) Montrez que AI=AB.(CG/CB)

d) Exprimez alors Tan(α) .

e) Montrez que la norme de R s'écrit mg/cos(α)

f) Montrez que la norme de T s'écrit R sin(α).

g) Déduisez des deux questions précédentes que la norme de T s'écrit aussi mg tan(α)

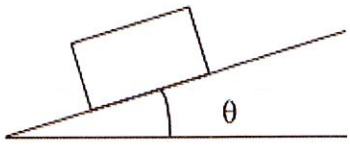
Exercice 3

A. On considère une brique immobile sur une table horizontale. On lui applique une force horizontale (cf. Figure).

1) Faire un bilan des forces. Comment définit-on le coefficient de frottement statique, μs? Quelle est son unité?

2) On incline la table d'un angle θ avec l'horizontale et on supprime la force F. Lorsque l'angle vaut θm, la brique se met à glisser. Établir la relation qui lie θm et μs. Que se passe-t-il si on colle une deuxième brique sur la première?

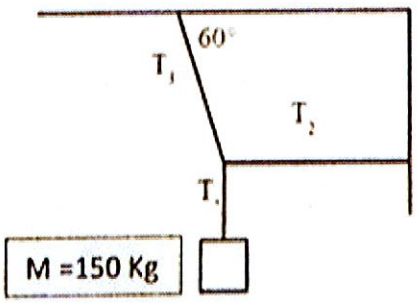




B. On veut montrer que le temps de chute libre en l'absence de frottement est $t=\sqrt{(2h/g)}$ (1). On effectue une série d'expériences de chutes de différentes hauteurs dans le vide, lors desquelles on mesure h et le temps de chute t. Le temps est mesuré à 0.1 seconde près, et la hauteur à 1cm près. Les hauteurs mesurées sont entre 5 cm et 10m.

Quel graphe peut-on construire à partir des mesures de h et t qui permette de conclure immédiatement sur la relation (1)

Exercice 4



1) Déterminer la tension de chaque corde dans le système ci-dessus

Centre Universitaire
MAYOTTE

LICENCE 1 MG

Examen MG 105

Année universitaire 2016/2017 – Semestre 1 – 2ème session

Aucun document n'est autorisé.
La calculatrice programmable est autorisée.

Ex 1

(U_n) est la suite définie sur ℝ par : $\forall n \in \mathbb{R}$, $U_{n+1} = 2U_n - 3$ et $U_0 = 1$;

1. Calculer U_1; U_2; U_3; U_4 .
2. On pose : $\forall n \in \mathbb{R}$, $V_n = U_n - 3$. Montrer que la suite (V_n) est géométrique de raison 2.
3. Exprimer alors V_n en fonction de n.
4. Calculer la limite de la suite (U_n).

Ex 2

(U_n) est la suite définie sur ℝ par : $\forall n \in \mathbb{R}$, $U_{n+1} = 3U_n + 5$. et $U_0 = -2$;

1. Calculer U_1; U_2; U_3; U_4 .
2. On pose : $\forall n \in \mathbb{R}$, $V_n = U_n + a$, où a est un réel constant.
3. Montrer que $\forall n \in \mathbb{R}$, $V_{n+1} = 3V_n + 5 - 2a$.
4. Pour quelle valeur de a la suite (V_n) est géométrique ?
5. On pose a = $\frac{5}{2}$, calculer $V_n, puis\ U_n$ en fonction de n.

Ex 3

L'objet du problème est l'étude de la fonction f définie sur ℝ par $f(x) = 2x + (x-1)e^x$.

Partie A : étude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur ℝ par $g(x) = 2 + xe^x$.

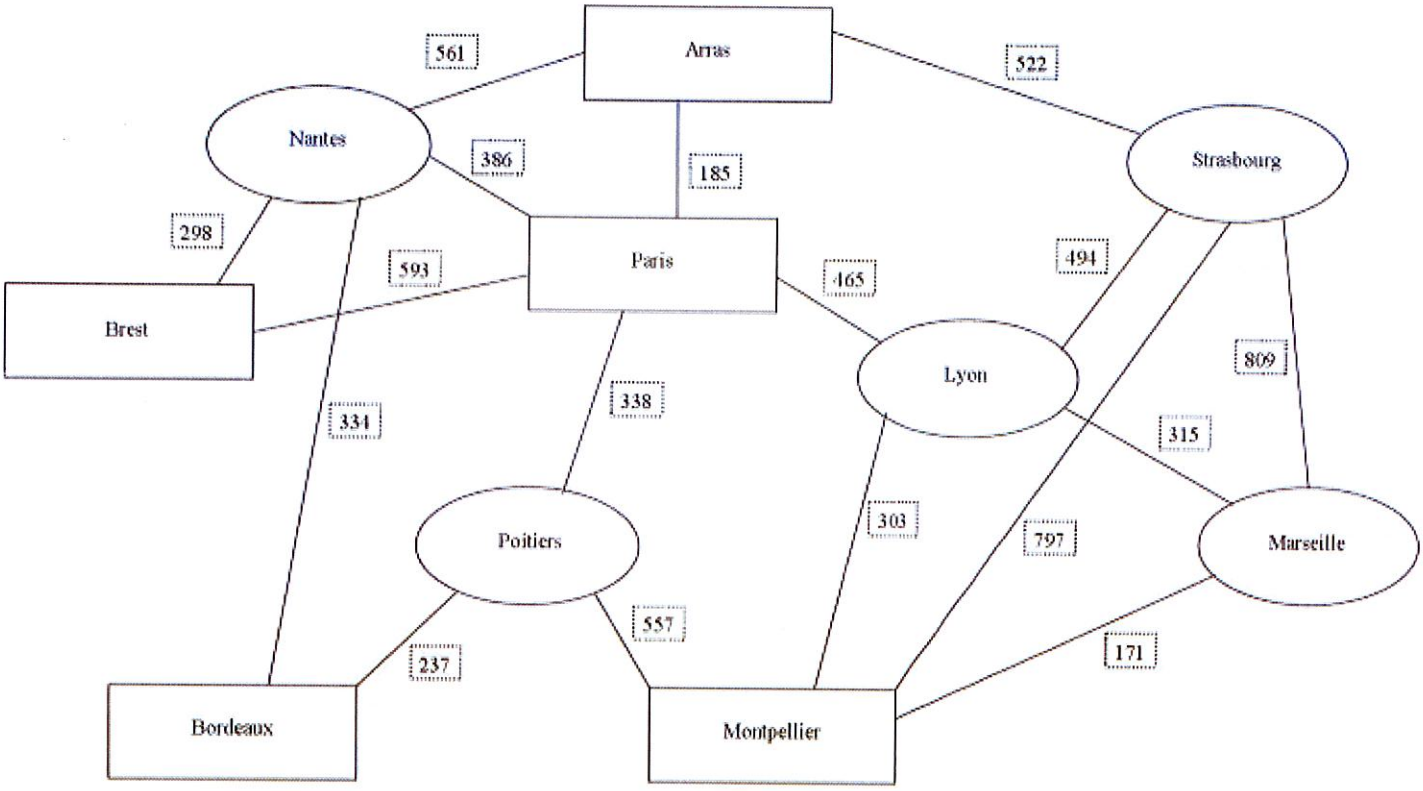
1°) Etudier le sens de variation de g (les limites ne sont pas demandées).

2°) En déduire le signe de $g(x)$ pour tout réel x.

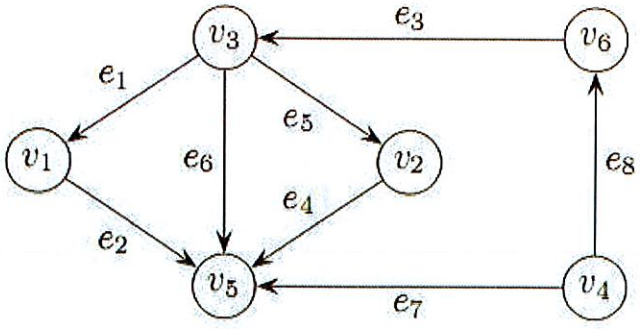
Licence L1 Mathématiques générales : UE-MG 204 : Recherche Opérationnelle

Session de rattrapage (juin 2017). Durée : 2 heures

Exercice 1 : Un routier se trouvant à Bordeaux voudrait se rendre à Strasbourg par le chemin le plus court en distance (Km). Quel parcours lui conseilleriez-vous (Dijkstra) et quelle est la distance de ce parcours ?



Exercice 2 : Donner la matrice d'incidence sommets-arcs et la matrice d'adjacence sommets-sommets du graphe suivant :



a) Représenter graphiquement le graphe associé à la matrice d'incidence sommets-arcs suivante :

i)
$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

b) Représenter graphiquement le graphe associé à la matrice d'adjacence sommets-sommets suivante :

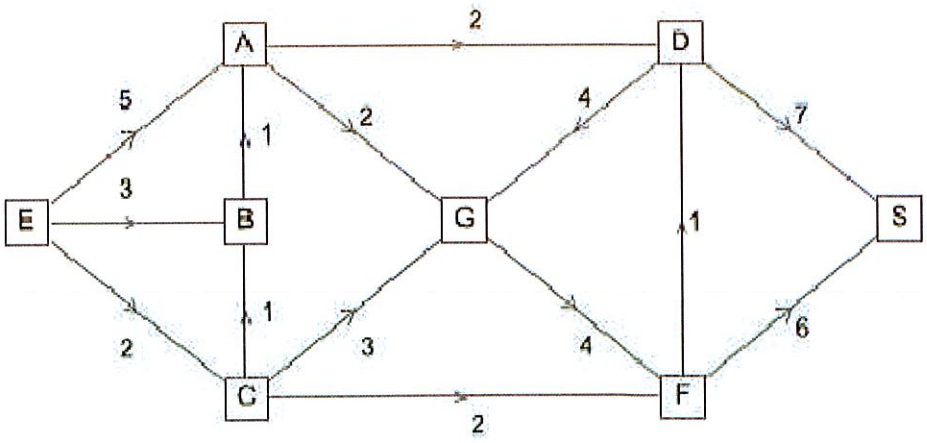
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 3 :

1) Le graphe ci-dessous représente le réseau routier d'une région qui prend en compte le sens de la circulation, chaque arc représente une route à sens unique dont le poids est la distance en kilomètre entre deux sommets.

a) Donner l'ensemble des sommets adjacents aux sommets : A, G et F

b) Quel est l'itinéraire le plus court qui relie E à S (Dijkstra)?



Epreuve de Physique L1-juin 2017

Exercice 1 (Calcul vectoriel)

1. Le vecteur vitesse est égal à (entourer la(les) bonne(s) réponse(s):
   a. la dérivée seconde du vecteur position
   b. la dérivée première du vecteur position
   c. la dérivée seconde du vecteur accélération
   d. la dérivée première du vecteur accélération

2. Le résultat d'un produit vectoriel est un vecteur.
   - Vrai
   - Faux

3. Soient 2 points A(1,2,6) et B(1,5,2). Calculer la distance AB.

4. Soit deux vecteurs $\vec{u}(2,1,-3)$ et $\vec{v}(3,-4,-2)$, calculez le produit scalaire $\vec{u}.\vec{v}$

5. Calculer le produit vectoriel de ces deux vecteurs.

6. Soit un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ contenant deux vecteurs $\vec{u} = \frac{1}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{j}$ et $\vec{v} = \vec{i}$.
   Calculez (en degré) l'angle $\vec{u}.\vec{v}$

Exercice 2 (Calculs de vitesse et d'accélération (*))

Un point M se déplace sur une courbe gauche de telle sorte que ses coordonnées sont :

$x = e^{-t}\cos t$

$y = e^{-t}\sin t$

$z = e^{-t}$

Calculer la vitesse et l'accélération de M à l'instant t ainsi que leurs normes.

17

Exercice 3 (Mouvement rectiligne uniforme (*))

Ecrire en coordonnées polaires les équations paramétriques d'un mouvement rectiligne uniforme $x = vt$ de vitesse v sur la droite $y = b$.

Déterminer les composantes en coordonnées polaires du vecteur vitesse.

Exercice 4 (Grandeurs cinématiques paramétrées par le temps (*))

Le rayon vecteur

$\overrightarrow{OM} = \vec{r} = (t^2 + t)\vec{i} + (3t - 2)\vec{j} + (2t^3 - 4t^2)\vec{k}$

Calculer l'expression de la vitesse et de l'accélération de M ainsi que leurs normes pour $t = 2$

Exercice 5 (Grandeurs cinématiques sur une hélice (*))

Le rayon vecteur $\overrightarrow{OM} = \vec{r}$

varie en fonction du temps suivant la loi :

$\vec{r} = a\cos\omega t\,\vec{i} + a\sin\omega t\,\vec{j} + ct^2\vec{k}$

1) Indiquer l'allure de la courbe décrite par M.
2) Donner l'expression de l'accélération et sa norme.

Exercice 6 (Calcul de vitesse et d'accélération (*))

Soit le vecteur $\vec{A} = 2t\vec{i} - (t^3 + t)\vec{j} + (t^2 - 2t)\vec{k}$

Calculer $\dfrac{d\vec{A}}{dt}$ et $\dfrac{d^2\vec{A}}{dt^2}$ pour $t = 3$.

Exercice 7 (Equations de mouvement dans le plan (*))

Les équations paramétriques du mouvement d'un mobile sont en coordonnées cartésiennes planes de base : $(\vec{i}, \vec{j})$:

$x = t - 3$

$y = 2t^2 + 4t + 1$

1. Trouver l'équation et la nature de la trajectoire.
2. Exprimer sur la base $(\vec{i}, \vec{j})$, le vecteur vitesse instantanée et le vecteur accélération

Écrire une dissertation en anglais, sur le sujet suivant : *expliquez comment une licence en mathématiques pourrait être utile pour un étudiant à Mayotte.*

Dans la dissertation, il faut utiliser les mots et la grammaire suivants. Pour recevoir de points, il faut soulignez (comme en jaune ou souligné) les mots et les verbes.

1. Les mots : *nearly, appealing, between, currently, guess (v), growth, spend (v), increase (v),*
amount, software, must, should, would, have to, might, shouldn't, could, can
2. La grammaire : 5 verbes en « present perfect », 4 verbes en « present simple », 2 verbes en « simple future », 2 verbes en « future proche » 1 verbe en «present perfect progressive »

Il est formellement interdit de chercher d'assistance linguistique pendant la rédaction : vous ne pouvez pas utiliser des dictionnaires ni des logiciels qui traduisent des phrases (comme googletranslate). Une rédaction faite avec l'aide électronique ou physique (comme une personne ou un dictionnaire) résultera en un 0.

19

Centre Universitaire
MAYOTTE

LICENCE 1 MG

MG 201 Algèbre Linéaire

Année universitaire 2016/2017 – Semestre 2 – 2ème session

Aucun document n'est autorisé.
La calculatrice programmable est autorisée.

EX 1) Soit E = R^3 ; $F = \{(x\,;y;z) \in R^3 tels\ que\ x + 3y - z = 0\}$,
$G = \{(x\,;y;z) \in R^3 tels\ que\ x + y + z = 0\ et\ y = 2z\}$

a) La somme F + G est-elle directe ?
b) Donner une base de F et une base de G
c) F et G sont-ils supplémentaires dans E ?

EX 2) Soient les vecteurs U = (1 ; 2 ; 4 ; -1). V = (-1 ; 1 ; 0 ; 4). W = (0 ; 5 ; 2 ; -2).
X = (0 ; 4 ; 3 ; 1). Calculer le rang de ce système de vecteurs. (U ; V ; W ; X) forment-ils une base de R^4 ?

EX 3) Soient les vecteurs U = (-1 ; 1). V = (-1 ; 3). W = (0 ; -1).
(U ; V ; W) forment-ils une famille génératrice de R^2 ?
Si oui, extraire une base de R^2 à partir de cette famille génératrice.

Ex 4) Soit E un espace vectoriel de dimension 3. Soit $B = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E.
Soit f l'endomorphisme de E défini par
$f(x\,;y\,;z) = (-x - 2y - 2z\,;x - y + z\,; -2x + y + z)$.
a) Donner A, la matrice de f dans la base B.
b) f est-elle bijective ?
c) Si oui, calculer A^{-1}
d) Donner l'expression de f^{-1} si c'est possible.
d) Calculez $f^{-1}(1\,;-2\,;3)$.

20

Centre Universitaire
MAYOTTE

LICENCE 1 MG

Examen MG 202 Analyse

Année universitaire 2016/2017 – Semestre 2 – 2ème session

Aucun document n'est autorisé.
La calculatrice programmable est autorisée.

EX 1)
Soit la courbe définie par ses coordonnées paramétriques :

$$\begin{cases} x(t) = \sin(2t) \\ y(t) = 3\cos(t) \end{cases}$$

1) Donner domaine de définition, domaines utile et domaines d'étude. On indiquera à chaque étape quelles sont les symétries qui permettent de compléter la courbe.
2) Etudier les variations de x(t) et y(t) sur $[0 ; \frac{\pi}{2}[$.
3) Effectuer le tracé de la courbe pour $t \in [0 ; \frac{\pi}{2}[$; on précisera les points où il existe une tangente horizontale ou une tangente verticale.
4) Tracer la courbe complète.

EX 2)
Soit la suite (U_n) définie par $U_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ Montrer que la suite (U_n) n'est pas une suite de Cauchy. Que peut-on en conclure sur la convergence de la suite réelle (U_n) ?

Ex 3)
Soit la suite (U_n) définie par $U_n = \frac{\sin n}{n^3}$. Quelle est la nature de la suite U_n ?

EX 4)
Donner le DL à l'ordre 3 au voisinage de 0 de Ln(1+2 sinx).

218

Licence L2 Mathématiques générales

UE-MG 301 : Algèbre Linéaire

Session de rattrapage (juin 2017). Durée : 2 heures

Exercice 1 :

Déterminer le polynôme caractéristique associé à chacune des matrices suivantes

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{vmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{vmatrix} -12 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 3 \\ 6 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

Exercice 2 : Soit M, la matrice de R^4 suivante $\mathbf{M} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 6 \end{vmatrix}$

a) Déterminer les valeurs propres de M et ses sous-espaces propres

b) Montrer que M est diagonalisable.

c) Déterminer une base de vecteurs propres et P la matrice de passage.

Exercice 3 : Soit u l'endomorphisme de R^3 dont la matrice dans la base canonique est

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} -3 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

a) Déterminer et factoriser le polynôme caractéristique de A.

b) Démontrer que les valeurs propres de A sont -1 et 2. Déterminer les sous-espaces propres associés.

Exercice 4 : Déterminer les valeurs et les sous-espaces propres associés à chacune des valeurs, pour chaque cas :

a) $E = R^3$, f l'endomorphisme dont la matrice dans la base canonique est

$$\mathbf{M(f)} = \begin{vmatrix} -3 & 1 & -2 \\ -7 & 5 & -2 \\ -3 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

b) $E = R^3$, f l'endomorphisme dont la matrice dans la base canonique est

$$\mathbf{M(f)} = \begin{vmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & -2 \\ -3 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

22 17

Licence L2 Mathématiques générales
UE-MG 302 : Analyse 3
Session de rattrapage (juin 2017). Durée : 2 heures

Définitions :

1. Une fonction en escalier ?
2. Quant est ce que l'on peut dire qu'une fonction f : [a,b] est intégrable au sens de Riemann ?
3. Énoncer la linéarité de l'intégrale :
4. Quant est ce que l'on peut dire qu'une fonction f de I dans R admet une primitive ?

Exercice 1:
Calculer les intégrales suivantes :

$$I_0=\int_0^{(\frac{\pi}{2})}(\frac{1}{1+\sin t})\,dt \qquad I_1=\int_0^{(\frac{\pi}{2})}(\frac{\sin t}{1+\sin t})\,dt$$

Exercice 2 :
Montrer que $7X^2 - e^X$ est intégrable au sens de Riemann et calculer son intégrale.

Exercice 3 :
On considère la fonction f : R → R définie par :

$$f(x):\begin{cases} 2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$$

1) Montrer que f n'est pas continue en 0.

2) On considère maintenant la fonction F : R → R définie par :

$$F(x):\begin{array}{l} x^2\sin\frac{1}{x}, x\neq 0 \\ 0, x=0 \end{array}$$

Montrer que F est une primitive de f sur R (on pourra étudier la dérivabilité de F en 0).

Exercice 4 :
Calculer les intégrales suivantes :

$$I_0=\int_0^x t\sin t^2\,dt \qquad I_1=\int_0^{2\pi}\cos t\, e^{\sin t}\,dt \qquad I_2=\int_0^1 t^2\arctan(t)\,dt \qquad I_4=\int_0^x t^2\ln(t)\,dt$$

Exercice 5 :
En utilisant la définition d'une fonction intégrable au sens de Riemann, montrer les propriétés suivantes:

1) Si f et g sont Riemann-intégrables sur [a,b], alors f+g est Riemann-intégrable sur [a,b].
2) Si f et g sont deux fonctions Riemann-intégrables sur [a,b], telles que, pour tout t ∈ [a,b], f(t)≤g(t), alors $\int_a^b f(t)\,dt \leq \int_a^b g(t)\,dt$

Licence 2 MG UE 303 : Probabilités élémentaires Examen de rattrapage

Durée : 2 h Calculatrices autorisées

Exercice 1

Soient A et B deux événements non impossibles de l'univers Ω d'une épreuve aléatoire, tels que :

$$p(B) = 3/7 \; ; \; p_B(\bar{A}) = 1/3 \; ; \; p_A(\bar{B}) = 2/5.$$

Compléter les deux arbres pondérés de probabilités associés à ces deux événements.

Exercice 2

Un jeu de trente-deux cartes comporte pour chacune des quatre famille (cœurs, carreaux, trèfles, piques) les cartes suivantes :

1 ; 7 ; 8 ; 9 ; 10 ; valet ; dame ; roi

Quelle est la probabilité qu'en prenant sept cartes au hasard on obtienne exactement deux valets et quatre trèfles ?

Exercice 3

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}$, on note $f(x) = (1+x)^n$.

a) Justifier au moyen de f la valeur exacte de la somme

$$C_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$$

b) Exprimer de deux manières la fonction dérivée de f : l'une étant sa forme factorisée, l'autre étant son expression obtenue après dérivation de la forme développée de $f(x)$.

c) En déduire en fonction de n la valeur de la somme :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k}$$

Exercice 4

On jette un dé ordinaire équilibré jusqu'à ce que le 6 apparaisse pour la première fois et on appelle X la variable aléatoire égale au nombre de coups nécessaires pour obtenir ce 6.

a) Déterminer la loi de probabilité de X, ainsi que l'espérance et l'écart-type de X.

b) Préciser la probabilité que le premier 6 apparaisse pour la première fois au onzième coup.

Exercice 5

On choisit au hasard, en même temps, quatre personnes dans une assemblée de vingt personnes dont neuf sont des hommes et onze des femmes.

Calculer la probabilité des événements A : « au moins une personne est un homme », et B : « exactement une personne est une femme ».

Exercice 6

Une usine fabrique un certain type d'objet. On sait que l'un de ces objets a une probabilité égale à 0,02 d'être défectueux. On teste 300 objets à la sortie de la chaîne de fabrication.

Soit X le nombre d'objets défectueux dans ce lot

a) Quelle est l'espérance de X ? Quel est son écart-type ?

b) Calculer la probabilité qu'il y ait exactement sept objets défectueux dans le lot.

c) Calculer la probabilité pour qu'il y ait au moins cinq objets défectueux dans le lot.

d) Justifier que ces probabilités peuvent être en bonne approximation obtenues au moyen d'une loi de Poisson que l'on précisera, et calculer l'erreur commise en effectuant cette approximation.

Exercice 7

Les moteurs d'un avion, tous identiques, fonctionnent indépendamment les uns des autres et ont chacun une probabilité p de défaillance en vol au cours d'un trajet donné.

Un avion a besoin d'au moins la moitié de ses moteurs en état de fonctionnement pour pouvoir terminer ce trajet.

Pour quelles valeurs de p un avion à quatre moteurs est-il plus fiable qu'un avion à deux moteurs ?

MG L2 S3 anglais examen de rattrapage

Écrire une dissertation en anglais, sur le sujet suivant : expliquer les trois métiers pour les personnes formées en licence mathématiques discutés dans le cours de S3 anglais. Donner des exemples et être détaillé. Vous pouvez aussi ajouter votre opinion sur les métiers.

Dans la dissertation, il faut utiliser les mots et la grammaire suivants. Pour recevoir de points, il faut soulignez (comme en jaune ou souligné) les mots et les verbes. Si vous n'arrivez pas à utiliser les mots (vocabulaire) dans la dissertation, vous pouvez ajouter des phrases séparées à la fin du sujet (juste après la fin de la dissertation) selon que vous soulignez les mots. Les mots pourraient être conjugués.

1. Les mots (vocabulaire) : fluctuate, slide, decline, rise, pie chart, show, pick up, slump, recover, chart, since, for
2. La grammaire : 5 verbes en « active voice » et 5 verbes en « passive voice »

Il est formellement interdit de chercher d'assistance linguistique pendant la rédaction : vous ne pouvez pas utiliser des dictionnaires ni des logiciels qui traduisent des phrases (comme googletranslate). Une rédaction faite avec l'aide électronique ou physique (comme une personne ou un dictionnaire) résultera en un 0.

25

Licence L2 Mathématiques générales
UE-MG 302 : Analyse 3
Session de rattrapage (juin 2017). Durée : 2 heures

Définitions :

1. Une fonction en escalier ?
2. Quant est ce que l'on peut dire qu'une fonction f : [a,b] est intégrable au sens de Riemann ?
3. Énoncer la linéarité de l'intégrale :
4. Quant est ce que l'on peut dire qu'une fonction f de I dans R admet une primitive ?

Exercice 1:

Calculer les intégrales suivantes :

$$I_0=\int_0^{(\frac{\pi}{2})}(\frac{1}{1+\sin t})dt \qquad I_1=\int_0^{(\frac{\pi}{2})}(\frac{\sin t}{1+\sin t})dt$$

Exercice 2 :

Montrer que $7X^2 - e^X$ est intégrable au sens de Riemann et calculer son intégrale.

Exercice 3 :

On considère la fonction f : R → R définie par :

$$f(x):\begin{cases} 2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$$

1) Montrer que f n'est pas continue en 0.

2) On considère maintenant la fonction F : R → R définie par :

$$F(x):\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$$

Montrer que F est une primitive de f sur R (on pourra étudier la dérivabilité de F en 0).

Exercice 4 :

Calculer les intégrales suivantes :

$$I_0=\int_0^x t\sin t^2\,dt \qquad I_1=\int_0^{2\pi}\cos t\, e^{\sin t}\,dt \qquad I_2=\int_0^1 t^2\arctan(t)\,dt \qquad I_4=\int_0^x t^2\ln(t)\,dt$$

Exercice 5 :

En utilisant la définition d'une fonction intégrable au sens de Riemann, montrer les propriétés suivantes:

1) Si f et g sont Riemann-intégrables sur [a,b], alors f+g est Riemann-intégrable sur [a,b].
2) Si f et g sont deux fonctions Riemann-intégrables sur [a,b], telles que, pour tout t ϵ [a,b], f(t)≤g(t), alors $\int_a^b f(t)\,dt \leq \int_a^b g(t)\,dt$

Centre Universitaire MAYOTTE

NUMERO D'ETUDIANT :

.....

MG406

Rattrapage – JUIN 2017
(1 heure 15 mn)

SUJET D'INFORMATIQUE

ni documents autorisés ni calculatrice autorisée ; répondre sur ce sujet et le placer dans une copie

PREMIERE PARTIE : EXCEL

Pyramide des âges **Mayotte**

AgeQ	Hommes 2002	Hommes 2007	Femmes 2002	Femmes 2007
0	- 13 303	- 16 203	12 829	15 650
5	- 11 624	- 13 739	11 518	13 500
10	- 9 192	- 11 483	9 097	11 920
15	- 8 356	- 9 144	8 986	9 580
20	- 6 770	- 5 789	8 330	7 871
25	- 6 618	- 6 262	7 787	8 725
30	- 6 977	- 6 651	6 154	7 725
35	- 4 343	- 6 468	3 974	5 922
40	- 3 655	- 4 385	3 221	3 990
45	- 2 658	- 3 261	2 210	2 872
50	- 2 320	- 2 508	1 876	2 255
55	- 1 393	- 1 948	1 211	1 618
60	- 1 171	- 1 329	1 044	1 193
65	- 710	- 833	577	788
70	- 623	- 671	595	595
75	- 265	- 348	227	341
80	- 161	- 234	215	225
85	- 65	- 89	72	110
90	- 40	- 35	55	66
95+	- 37	- 25	42	36

Population totale par catégorie :				
Minimum :				
Maximum :				
Nombre de catégories :				
Nombre de catégories dont la population dépasse 7000 :				
Population correspondant au critère AgeQ<25 (avec un SOMME.SI)				

Moyenne hommes 2002/2007	Moyenne femmes 2002/2007	% femme / homme en 2002	% femme / homme en 2007

POPULATION TOTALE EN 2007 :	

QUESTIONS

Dans le tableau ci-dessus, quelles formules (complètes) proposez-vous pour les cellules suivantes, vous utiliserez à chaque fois que cela est possible les fonctions appropriées :

B25 (sommes des hommes en 2002) : .....

B26 (plus petite valeur de la colonne) : .....

B27 (plus grande valeur de la colonne) : .....

B28 (nombre de lignes de la colonne) : .....

B29 (nombre de lignes dont la valeur dépasse 7000) : .....

B30 (total population d'age<25 avec SOMME.SI) : .....

G4 (moyenne 2002/2007 des hommes) : .....

H4 (moyenne 2002/2007 des femmes) : .....

I4 (% des femmes/hommes en 2002) : .....

30

J4 (% des femmes/hommes en 2007) : .....

J27 (population totale en 2007) : .....

De H26 à I27, nous avons appliqué un formatage spécial aux cellules, de quoi s'agit-il ?

.....

Quelle est la fonction qui permet d'afficher dans une cellule la date du jour ?

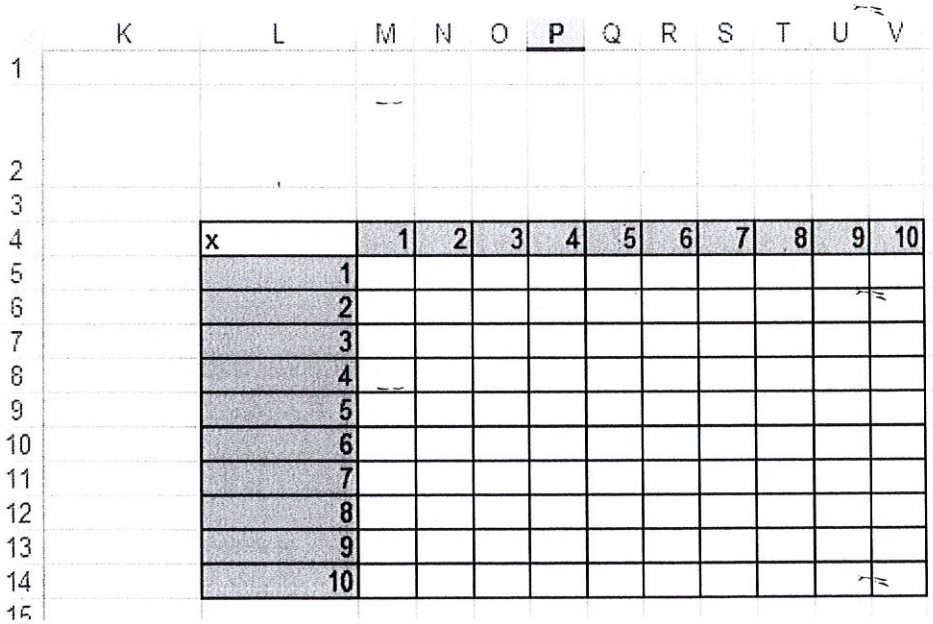
.....

Quel menu permet de créer les bordures, gérer les styles de police, l'alignement, etc ?

.....

Quelle touche du clavier permet de faire des sélections multiples de cellules disjointes ?

.....



	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V
1												
2												
3												
4		x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
5		1										
6		2										
7		3										
8		4										
9		5										
10		6										
11		7										
12		8										
13		9										
14		10										
15												

Je veux créer sous Excel un tableau avec les tables de multiplication mais je ne veux entrer que la première cellule (M5). Quelle formule dois-je indiquer ? Attention aux $...

.....

Que puis-je faire pour ne saisir dans la colonne L que « 1 » et « 2 » et que le reste se fasse automatiquement (c'est-à-dire le comptage jusqu'à 10) ?

.....

NUMERO D'ETUDIANT :

.....

SECONDE PARTIE : QUESTIONS DE COURS

Quelques questions peuvent avoir plusieurs réponses possibles.

Qu'utilise-t-on pour surfer sur le web une fois connecté au réseau ?
☐ Réponse 1 : Une suite bureautique
☐ Réponse 2 : Une clé USB
☐ Réponse 3 : Un système d'exploitation
☐ Réponse 4 : Un navigateur
☐ Réponse 5 : Un moteur de recherche

Qu'est-ce qu'un hoax ?
☐ Réponse 1 : Une rumeur circulant par courrier électronique
☐ Réponse 2 : Un virus
☐ Réponse 3 : Un anti-virus
☐ Réponse 4 : Une blague diffusée sur la toile
☐ Réponse 5 : Un logiciel espion

Comment savoir si on se trouve sur une page Web sécurisée ?
☐ Réponse 1 : Le navigateur affiche une icône de cadenas près de la barre d'adresse
☐ Réponse 2 : On ne peut pas le savoir
☐ Réponse 3 : L'URL commence par https://
☐ Réponse 4 : La couleur de fond de la page est modifiée
☐ Réponse 5 : On a dû obligatoirement entrer un mot de passe pour y accéder

Lorsqu'une adresse électronique figure dans le champ Cci ou Bcc d'un courriel, quel est son statut?
☐ Réponse 1 : C'est l'adresse du destinataire qui est mis en copie de ce courriel secrètement, sans que les autres destinataires le sachent
☐ Réponse 2 : C'est l'adresse de l'expéditeur du courriel
☐ Réponse 3 : C'est l'adresse du destinataire principal, à qui le courriel s'adresse directement
☐ Réponse 4 : C'est l'adresse du destinataire qui est mis en copie de ce courriel, pour être tenu informé de son contenu au vu et su des autres destinataires
☐ Réponse 5 : C'est l'adresse du destinataire principal à qui ce courriel sera acheminé en mode sécurisé
Question 3

Combien d'octets peut-on télécharger en 10 secondes avec une connexion à 512 kbps ?
☐ Réponse 1 : 7 ko
☐ Réponse 2 : 56 Mo
☐ Réponse 3 : 560 ko
☐ Réponse 4 : 640 ko

Que permet l'« informatique en nuage » (cloud computing) ?
☐ De taguer des fichiers sur son disque dur.
☐ De naviguer sur le web.
☐ D'utiliser des services numériques et des données sans se préoccuper de leur localisation.
☐ De disposer d'une connexion à très haut débit.

On recherche tous les documents commençant par "fic", quelle syntaxe de recherche doit-on utiliser ?
☐ Réponse 1 : %fic
☐ Réponse 2 : fic*
☐ Réponse 3 : *fic
☐ Réponse 4 : fic%

Quelle est la plus grande capacité de stockage ?
☐ Réponse 1 : 256 Mo
☐ Réponse 2 : 4 Go
☐ Réponse 3 : 512 To
☐ Réponse 4 : 1024 ko

Qu'est-ce que Linux ?
☐ Réponse 1 : Un type d'ordinateur
☐ Réponse 2 : Un système de gestion de bases de données
☐ Réponse 3 : Un système d'exploitation
☐ Réponse 4 : Une interface graphique

Que peut-on dire des images d'un site Web ?
☐ Réponse 1 : Elles peuvent être récupérées et mises sur son propre site Web sans aucune restriction
☐ Réponse 2 : Elles sont libres de droits, sauf mention explicite d'un copyright
☐ Réponse 3 : Elles peuvent être récupérées et mises sur son propre site Web à condition de citer l'auteur
☐ Réponse 4 : Elles sont soumises au droit d'auteur

32

Centre Universitaire
MAYOTTE

MG304

« INTRO AUX LOGICIELS SCIENTIFIQUES »

Rattrapage – juin 2017

SUJET

1 heure 15 mn ; répondre sur le sujet, vous placerez ce sujet dans une copie

EXERCICE 1 – analyse et compréhension de code R

Que realise les 3 lignes suivantes ?

```
x<-rnorm(200,0,1)
hist(x)
plot(density(x))
```

Quelle est l'utilité des lignes ci-dessous ? Est-ce une fonction ? Pourquoi ?

```
po<-function(n,lambda)
{
p<-0
for (i in 1:n) p[i]<-dpois(x=i,lambda=lambda)
plot(p,type="h")
}
```

```
po(20,5)
```

Que fait-on ci-dessous ?

```
z<-(x+y)/sqrt(2)
y<-(x-y)/sqrt(2)
plot(z,y,xlim= c(-3,3),ylim= c(-3,3),pch=20)
```

Voici un algorithme complet sous R, que réalise-t-il ? Quelle méthode mathématique utilise-t-il ?
Quel est le rôle du « else » ?

```
## Fonction utilisant ....
## f : la fonction
## a, b : les bornes initales de l'intervale
## tol : la tolérance
f.a <- f(a)
```

Centre Universitaire MAYOTTE

NUMERO D'ETUDIANT :

```
f.b <- f(b)
while (abs(f.b - f.a) > tol){
milieu <- 0.5 * (a + b)
f.milieu <- f(milieu)
if ((f.milieu * f.a) > 0)
    {
        a <- milieu
        f.a <- f.milieu
    }
    else{
        b <- milieu
        f.b <- f.milieu
    }
}
return(milieu)
}
```

EXERCICE 2 – problème sur R

La suite de Fibonacci est définie de manière récursive par :

$$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n, \qquad u_0 = 0,\ u_1 = 1,\ n \geq 0.$$

Ainsi si l'on veut obtenir les 20 premiers nombres de cette suite, nous pouvons utiliser :

une boucle for :

```
fibonacci <- rep(NA, 20)
fibonacci[1:2] <- c(0, 1)
for (i in 3:20)
{
    fibonacci[i] <- fibonacci[i-1] + fibonacci[i-2]
}
```

Qu'obtient-on quand on tape fibonacci ? Donnez l'affichage ainsi qu'une petite explication sur ce que vous voyez.

Centre Universitaire
MAYOTTE

NUMERO D'ETUDIANT :

on peut « s'amuser » à vérifier numériquement que la suite converge vers le nombre d'or

Comment complétez/modifiez-vous la fonction précédente pour vérifier cela ?

EXERCICE 3 – cours

En rapport à ce qui a été vu en TP, à quoi peut servir les fonctions (indice : dans un but de comparaison statistique) :

a) cor(satisf$score.relation, satisf$age, use="complete.obs")
b) table(satisf$sexe[!is.na(satisf$score.relation)])
c) sd(satisf$score.relation[satisf$sexe==0],na.rm=TRUE)
d) sd(satisf$score.relation[satisf$sexe==1],na.rm=TRUE)
e) t.test(satisf$score.relation~satisf$sexe, var.equal=TRUE)

Expliquez en détail le rôle de chaque ligne :

35

Licence L2 Mathématiques générales

UE-MG 401 : Géométrie Euclidienne et Bilinéaire

Session de rattrapage (juin 2017). Durée : 2 heures

Exercice 1 :

Soit f l'application de R^2x R^2 dans R définie par :

$f\big((x_1, x_2), (y_1, y_2)\big) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_1y_2$

Montrer que f est une forme bilinéaire sur R^2.

Exercice 2 :

Soient E = C^1 ([0,1], K) l'ensemble des fonctions de classe C^1 sur [0,1] à valeurs dans K et ϕ l'application de E x E dans K définie par

$\forall f, g \in E, \phi(f,g) = \int_0^1 f'(t)g'(t)dt + f(0)g(0)$

On sait que ϕ est une forme bilinéaire symétrique sur E. Trouver deux polynômes de degré 1 orthogonaux pour cette forme bilinéaire symétrique.

Exercice 3 :

Soit f la forme bilinéaire symétrique de R^3définie par :

Pour tout $X = (x_1, x_2, x_3), Y = (y_1, y_2, y_3) \in R^3$

$f(X, Y) = x_1y_3 + x_2y_3 + x_3y_1 + x_3y_2 - x_1y_2 - x_2y_1$

f est-elle dégénérée ? (Réponse construite)

Exercice 4 :

Trouver la matrice de la forme quadratique f de R3 x R3 définie par

$$f(x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) = 4x_1y_3 - 5x_2y_3 - x_3y_2 + 3x_1y_2 + x_1y_1 + 2x_2y_2$$

Exercice 5 :

Déterminer une décomposition de Gauss et en déduire la signature de la forme quadratique suivante :

$$q(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + x_1x_3$$

Examen de rattrapage
Durée 2h – Calculatrices autorisées

Exercice 1.
Soit U une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0;1]$. On considère la variable $X = -\ln(U)$. Démontrer que X suit une loi exponentielle, dont on précisera le paramètre.

Exercice 2.
Soit $a > 0$. On considère les coefficients réels :

$$\forall\,(i;j) \in \mathbb{N}^2,\ p_{ij} = \lambda \frac{a^{i+j}}{i!\,j!}$$

1) Déterminer l'unique valeur de λ pour laquelle les coefficients ainsi définis forment la loi d'un couple de variables aléatoires est $\lambda = e^{-2a}$.
2) Soit $(X;Y)$ un couple de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$ et admettant les nombres p_{ij} pour loi conjointe. Démontrer que X et Y suivent des lois de Poisson de paramètre a.
3) Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
4) Démontrer que la somme $Z = X + Y$ suit une loi de Poisson de paramètre $2a$.

Exercice 3.
Un individu fait du tir à l'arc sur une cible circulaire de rayon 1. On suppose qu'il atteint toujours la cible, mais qu'il est assez maladroit pour que le point d'impact M de coordonnées $(X;Y)$ dans un repère orthonormé centré au centre de la cible soit uniformément distribué sur la cible. On note $D = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 1\}$.

1) Quelle est la densité du couple aléatoire $(X;Y)$?
2) Déterminer les densités marginales de X et de Y.
3) Ces deux variables sont-elles indépendantes ?

Exercice 4.
Une variable aléatoire X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(1\,000\,;0{,}03)$.
Quelle est l'erreur commise lorsqu'on calcule $\mathbb{P}(29 \leq X \leq 32)$ au moyen du théorème de De Moivre-Laplace (donc au moyen d'une loi normale) ?

Exercice 5.
Dans une usine, la chaîne de production d'un certain objet est responsable de 3 % d'anomalies. 1 500 objets sont livrés dans une grande surface. Au risque de 4 %, combien de boîtes anormales peut-on s'attendre à trouver dans cette livraison ? Même question si le risque pris est de 5 %.

Numéro de carte d'étudiant. .....
Session de rattrapage : 2ième Semestre : Examen de Mathématiques – L2MG UE305-Centre universitaire de Mayotte 2016/2017 : Calculatrice autorisée : Durée : 2H

Exercice 1 (10 points)

a) En utilisant un développement limité déterminer les limites

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x^2}-1-2x^2}{x^4} \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{\ln(1+x)}{x}\right) .$$

b) À l'aide d'un changement de variables, calculer $\int_1^e \frac{(\ln x)^n}{x}dx$ où n est un entier naturel non nul.

À l'aide d'intégrations par parties, déterminer une primitive de la fonction $x \mapsto (\ln x)^2$.

c) À l'aide de la méthode de la variation de la constante résoudre l'équation différentielle :

(ϵ) $y'(x)+y(x)=\frac{e^{-x}}{x^2}$ vérifiant la condition $y(1)=0$.

Exercice 2 (6 points)

On considère l'application f : $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x+3y+5z\,;2x+4y+6z\,;3x+7y+11z) \end{array}$.

a) Montrer que f est une application linéaire.

b) Déterminer le noyau et l'image de f.

c) L'application f est-elle injective ? Surjective ? Bijective ?

Exercice 3 (4 points)

Soit E un espace vectoriel de dimension n et f une application linéaire de E dans lui-même.
Montrer que les deux assertions suivantes sont équivalentes :

(i) $\text{Ker}\, f = \text{Im}\, f$
(ii) $f^2=0$ et $n=2.\text{rg}(f)$

MG L3 S5 anglais examen de rattrapage

Écrire une dissertation en anglais, sur le sujet suivant : expliquer le chapitre de Malcolm Gladwell sur les « outliers », en connectant les arguments avec votre expérience comme étudiant au CUFR en mathématiques.

Il est formellement interdit de chercher d'assistance linguistique pendant la rédaction : vous ne pouvez pas utiliser des dictionnaires ni des logiciels qui traduisent des phrases (comme googletranslate). Une rédaction faite avec l'aide électronique ou physique (comme une personne ou un dictionnaire) résultera en un 0.

Durée : 2h – Calculatrices autorisées

Exercice 1

On note $A = \begin{pmatrix} -3 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 4 & -4 \end{pmatrix}$.

a) Calculer le polynôme caractéristique de A. En déduire son polynôme minimal.
b) Montrer que A est trigonalisable dans $\mathbb{R}$ et donner sa réduite de Jordan.
c) Donner la décomposition de Dunford de A.
d) Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$ par deux méthodes et en déduire les solutions du système récurrent :

$$\begin{cases} u_{n+1} = -3u_n - 3v_n + 2w_n \\ v_{n+1} = u_n + v_n - 2w_n \\ w_{n+1} = 2u_n + 4v_n - 4w_n \end{cases}$$

Exercice 2

a) Calculer pour tout $t \in \mathbb{R}$ l'exponentielle de tA, où $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.
b) En déduire l'unique solution f de l'équation différentielle $(E) : y'' - 2y' + y = t$ satisfaisant les conditions initiales $f(0) = f'(0) = 0$.

Exercice 3

a) L'ensemble B des matrices de la forme $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, où $a \in \mathbb{R}$, forme-t-il un sous-groupe du groupe $(GL_2(\mathbb{R}) ; \times)$ des matrices réelles inversibles d'ordre 2 ?
b) Même question pour l'ensemble D des matrices diagonales de $GL_2(\mathbb{R})$ et pour l'ensemble T des matrices triangulaires supérieures de $GL_2(\mathbb{R})$.
c) L'ensemble H des matrices de la forme $\begin{pmatrix} x & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ avec $x \in \mathbb{R}$, forme-t-il un sous-groupe du groupe $(GL_2(\mathbb{R}) ; \times)$? Muni de la loi multiplicative, est-ce un groupe ?

Exercice 4

On considère le sous-ensemble D_8 de l'ensemble $GL_2(\mathbb{C})$, formé des 8 matrices suivantes :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \; ; \; -I \; ; \; J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \; ; \; -J \; ; \; T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \; ; \; -T \; ; \; U = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \; ; \; -U$$

a) Déterminer la table de composition (au sens de la multiplication) des paires d'éléments de D_8
b) En déduire que $(D_8 ; \times)$ est un sous-groupe de $(GL_2(\mathbb{C}) ; \times)$.
c) Déterminer l'ordre de chaque élément de D_8.
d) Déterminer tous les sous-groupes de D_8.

Exercice 5

Dans le groupe spécial linéaire $G = SL_2(\mathbb{R})$ muni de la loi $\times$, on considère les sous-groupes monogènes H et K respectivement engendrés par $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) Déterminer H et K. À quels groupes de référence les sous-groupes $(H ; \times)$ et $(K ; \times)$ sont-ils isomorphes ?
b) Quelles sont les classes à gauche et à droite de G modulo H et modulo K ?

Exercice 6

Soit G un groupe fini d'ordre impair, de loi notée multiplicativement. Montrer que $f : \begin{vmatrix} G \to G \\ x \mapsto x^2 \end{vmatrix}$ est bijective.

Durée : 2h. Calculatrices interdites

Exercice 1

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que l'ensemble $GL_n(\mathbb{C})$ des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est un ouvert dense de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Exercice 2

Soient $(E; d)$ un espace métrique et D une partie dense dans E. Démontrer que E est complet si et seulement si toute suite de Cauchy dans D converge dans E.

Exercice 3

Soient E un espace vectoriel normé et F un sous-espace vectoriel de E.

a) Démontrer que $\bar{F}$ est un sous-espace vectoriel de E.
b) Démontrer que si F est un hyperplan de E, alors F est soit fermé dans E, soit dense dans E.

Exercice 4

On note E l'espace vectoriel des fonctions dérivables sur $[0; 1]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

a) Pour $f \in E$, on pose $N(f) = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$. Montrer que N est une norme sur E, puis que cette norme n'est pas équivalente à $\|.\|_\infty$.
On pourra considérer la suite de fonctions de terme général $f_n : x \mapsto \cos(2\pi n x)$
b) Pour $f \in E$, on pose $N'(f) = |f(0)| + \|f'\|_\infty$. Montrer que N' est une norme sur E, puis que cette norme est équivalente à N.
On pourra en particulier établir que pour tout $f \in E$, $N(f) \leq 2N(f')$.

Exercice 5

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $O_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices orthogonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, c'est-à-dire des matrices A telles que ${}^tAA = I_n$.

Démontrer que $O_n(\mathbb{R})$ est, au sens de n'importe quelle norme définie sur l'espace vectoriel $(O_n(\mathbb{R}); +; .)$, un compact de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 6

Soit E l'espace vectoriel des fonctions réelles continues sur $[0; 1]$ muni de la norme

$$\|.\|_1 : f \mapsto \int_0^1 |f(x)|\, dx$$

a) Etudier la continuité de la forme linéaire φ définie sur E par :

$$\varphi(f) = \int_0^1 x\, f(x)\, dx$$

b) Calculer la norme fonctionnelle de φ induite par $\|.\|_1$. On pourra considérer la suite de fonctions $(f_n : x \mapsto x^n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Centre Universitaire MAYOTTE

ANNÉE 2016–2017 **LICENCE MG L3**

UE MG 504-ANALYSE NUMERIQUE DES EQUATIONS DIFFERENTIELLES

EXAMEN (SESSION 2) ANALYSE NUMÉRIQUE DES EQUATIONS DIFFÉRENTIELLES
DUREE : 2 HEURES

La clarté du raisonnement est prise en compte. Bonne concentration et bon travail.

Exercice 1 (6 pts)

Soit le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} y'(t) = e^{-t} - 2y(t) = f(t,y), & t \in [0,1] \\ y(0) = 1, \end{cases} \tag{1}$$

1) Montrer que $f(t,y)$ est Lipshitzienne par rapport à t, et donner une constante de Lipshitz.
2) Montrer que ce Problème admet une solution unique.
3) Donner la solution exacte de (1), ainsi que $y(0,2)$.
4) Aplliquer la méthode d'Euler à ce problème et donner l'approximation y_2 de $y(0,2)$ obtenue à l'aide d'un pas de discrétisation numérique $h = 0,1$.
5) Rappeler l'erreur théorique de la méthode d'Euler et la comparer à l'erreur commise sur le calcul de $y(0,2)$. Commentaires ?
6) Donner l'interpolation de Lagrange de la solution exacte $y(t)$ aux points 0, 1/2 et 1.
7) Ecriver la formule de quadrature correspondante sur l'intervalle $[0,1]$ et donner l'approximation obtenue.
8) Calculer
$$\int_0^1 y(t)dt$$
avec la solution exacte $y(t)$.
9) Evaluer l'erreur commise par rapport à la question numéro 7

Exercice 2 (5 pts)

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction. On désigne par P_n son polynôme d'interpolation aux points x_i, $\quad i = 0,1,...,n$ où

$$x_i = a + i\,h, \quad h = (b-a)/2.$$

45

1) En utilisant le Théorème des accroissements généralisés du cours montrer que

$$(1) \qquad |f(x) - P_1(x)| \leq \frac{1}{8} M_2 h^2$$

avec M_2 à préciser.

2) Plus généralement montrer que

$$(2) \qquad |f(x) - P_n(x)| \leq C\, M_{n+1} h^{n+1}$$

où C est une constante.

3) Soit L_n le polynôme d'interpolation de Lagrange de la fonction

$$f(x) = \frac{1}{x - \alpha}, \quad -1 \leq x \leq 1,$$

aux $n+1$ points distincts x_0, x_1,...x_n de l'intervalle $[-1, 1]$.

a) Calculer les dérivées première et secondes de la fonction f. Donner l'expression de la dérivée à l'ordre n et le prouver ensuite par réccurence sur n.

b) Montrer que si $\alpha > 3$, et si les $n+1$ points x_0, x_1,...x_n sont équidistants, nous avons alors

$$\lim_{n \to \infty} |f(x) - L_n(x)| = 0 \quad \forall x \in [-1, 1].$$

Exercice 3 (5 pts)

Les polynômes d'interpolation sont à écrire dans la base de Newton.

On pose $t_0 = 1$, $t_1 = 2$, $t_2 = 3$, $f(1) = 1$, $f(2) = 3$, $f(3) = 4$.
1) Ecrire le polynôme P_0 de degré 0 qui interpole f en $t_0 = 1$.
2) Ecrire le polynôme P_1 de degré 1 qui interpole f en t_0, t_1.
3) Ecrire le polynôme P_2 de degré 2 qui interpole f en t_0, t_1, t_2.

Exercice 4 (4 pts)

Soit P_3 le polynome d'interpolation dans la base de Newton de la fonction f telle que

$$f(0) = 1/2, \quad f(1) = 1, \quad f(2) = 2, \quad f(3) = -1/2.$$

Calculer les coefficients d c_k de ce polynôme à l'aide du tableau des différences divisées proposé dans le cours.

4.6

Durée : 2h – Calculatrices autorisées

Exercice 1

On note $A = \begin{pmatrix} -3 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 4 & -4 \end{pmatrix}$.

a) Calculer le polynôme caractéristique de A. En déduire son polynôme minimal.
b) Montrer que A est trigonalisable dans $\mathbb{R}$ et donner sa réduite de Jordan.
c) Donner la décomposition de Dunford de A.
d) Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$ par deux méthodes et en déduire les solutions du système récurrent :

$$\begin{cases} u_{n+1} = -3u_n - 3v_n + 2w_n \\ v_{n+1} = u_n + v_n - 2w_n \\ w_{n+1} = 2u_n + 4v_n - 4w_n \end{cases}$$

Exercice 2

a) Calculer pour tout $t \in \mathbb{R}$ l'exponentielle de tA, où $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.
b) En déduire l'unique solution f de l'équation différentielle $(E) : y'' - 2y' + y = t$ satisfaisant les conditions initiales $f(0) = f'(0) = 0$.

Exercice 3

a) L'ensemble B des matrices de la forme $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, où $a \in \mathbb{R}$, forme-t-il un sous-groupe du groupe $(GL_2(\mathbb{R}) ; \times)$ des matrices réelles inversibles d'ordre 2 ?
b) Même question pour l'ensemble D des matrices diagonales de $GL_2(\mathbb{R})$ et pour l'ensemble T des matrices triangulaires supérieures de $GL_2(\mathbb{R})$.
c) L'ensemble H des matrices de la forme $\begin{pmatrix} x & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ avec $x \in \mathbb{R}$, forme-t-il un sous-groupe du groupe $(GL_2(\mathbb{R}) ; \times)$? Muni de la loi multiplicative, est-ce un groupe ?

Exercice 4

On considère le sous-ensemble D_8 de l'ensemble $GL_2(\mathbb{C})$, formé des 8 matrices suivantes :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \; ; \; -I \; ; \; J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \; ; \; -J \; ; \; T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \; ; \; -T \; ; \; U = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \; ; \; -U$$

a) Déterminer la table de composition (au sens de la multiplication) des paires d'éléments de D_8
b) En déduire que $(D_8 ; \times)$ est un sous-groupe de $(GL_2(\mathbb{C}) ; \times)$.
c) Déterminer l'ordre de chaque élément de D_8.
d) Déterminer tous les sous-groupes de D_8.

Exercice 5

Dans le groupe spécial linéaire $G = SL_2(\mathbb{R})$ muni de la loi $\times$, on considère les sous-groupes monogènes H et K respectivement engendrés par $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) Déterminer H et K. À quels groupes de référence les sous-groupes $(H ; \times)$ et $(K ; \times)$ sont-ils isomorphes ?
b) Quelles sont les classes à gauche et à droite de G modulo H et modulo K ?

Exercice 6

Soit G un groupe fini d'ordre impair, de loi notée multiplicativement. Montrer que $f : \begin{vmatrix} G \to G \\ x \mapsto x^2 \end{vmatrix}$ est bijective.

Centre Universitaire MAYOTTE

ANNÉE 2016–2017 **LICENCE MG L3**

UE MG 604-MODELISATION DETERMINISTE ET STOCHASTIQUE

EXAMEN (SESSION 2) DE MODÉLISATION DÉTERMINISTE ET STOCHASTIQUE
DUREE : 2 HEURES

Exercice 1

1) Résoudre l'EDP

$$x\frac{\partial f}{\partial y} - y\frac{\partial f}{\partial x} = a\sqrt{x^2+y^2}$$

en passant aux coordonées polaires

$$\begin{cases} x = r\cos(\theta) \\ y = r\sin(\theta) \end{cases}$$

2) On s'intéresse à l'EDP suivante, dite équation des ondes :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}.$$

1. Résoudre cette équation à l'aide du changement de variables :

$$\begin{cases} u = x - ct \\ v = x + ct \end{cases}$$

2. Quelle est la forme de la solution si l'on impose les conditions

$$f(x,0) = x \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial t}(x,0) = \cos(x).$$

3) Grâce au changement de variable :

$$\begin{cases} u = xy \\ v = x + y \end{cases}$$

résoudre l'EDP suivante :

$$x\frac{\partial f}{\partial x} - y\frac{\partial f}{\partial y} = x - y.$$

48

Exercice 2

Soient U_1 et U_2 deux variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $[0,1]$. On définit :

$$X = \sqrt{-2\log(U_1)}\cos(2\pi U_2) \quad \text{et} \quad Y = \sqrt{-2\log(U_1)}\sin(2\pi U_2)$$

1) Déterminer la loi du couple (X, Y)
2) Montrer que X et Y ont même loi et sont indépendantes.
3) Quelle est la loi commune ?
4) Ecrire un algorithme pour simuler la loi gaussienne centrée réduite à partir de loi uniforme.
5) Proposez également une méthode de simulation d'une loi gaussienne de moyenne m et de variance σ^2.

Exercice 3

On rapelle que la méthode de rejet pour simuler une densité inconnue f à partir d'une densité g simple à simuler appelée "instrumental density" consiste tout d'abord à trouver une constante $M > 0$ telle que

$$\frac{f(x)}{g(x)} \leq M < \infty$$

puis à procéder de la manière suivante :

Etape 1 : Générer Y de densité g et U de loi uniforme sur $[0,1]$ indépendamment.
Etape 2 : Poser $X = Y$ si $U \leq \frac{f(Y)}{Mg(Y)}$. Sinon retourner à Etape 1.
Etape 3 : Renvoyez X.

Sous ces conditions on affirme que l'algorithme se termine en T itérations où T est une loi géométrique de paramètre $1/M$. La v.a. X ainsi simulée a pour densité f.

1) Soit la loi de probabilité sur $[-1, 1$ définie par la fonction de densité

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2}\mathbb{I}_{[-1,1]}(x).$$

Déterminez M afin que :

$$f(x) \leq M \times \frac{1}{2}\mathbb{I}_{[-1,1]}(x).$$

2) En déduire une méthode de simulation par rejet de f à partir de la densité g de la loi uniforme sur $[-1, 1]$.

Exercice 4

On cherche à calculer

$$I = \int_0^1 e^{x^2} dx$$

par une méthode de Monte-Carlo.

1. Montrer que $I = \mathbb{E}g(X^2)$ où g est une fonction donnée et X une variable aléatoire de loi à préciser. 2. Utiliser la loi forte des grands nombres pour donner une approximation de I à partir d'un échantillon de taille n (n grand) de la loi de X.

Centre Universitaire MAYOTTE

ANNÉE 2016–2017 **LICENCE MG L3**

UE MG 602-PROBABILITES ET STATISTIQUES

EXAMEN (SESSION 2) DE PROBABILITÉS ET STATISTIQUES
DUREE : 2 HEURES

Exercice 1

Soit (X, Y) une v.a. à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ de densité :

$$f_{(X,Y)}(x, y) = xe^{-x(y+1)}\mathbb{I}_{\mathbb{R}_+}(x)\mathbb{I}_{\mathbb{R}_+}(y).$$

1) Déterminer la densité marginale de la loi de Y.
2) On définit le couple de variables aléatoires (U, V) par

$$U = X \qquad V = XY$$

Pour toute fonction mesurable bornée $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, exprimez $\mathbb{E}g(U, V)$ à l'aide de $f_{X,Y}$ et en déduire la densité de la loi du couple (U, V).
(On pourra faire un changement de variables).
3) Est-ce que les variables aléatoires U et V sont indépendantes ? Quelles sont leurs lois ?

Exercice 2

Soit X une variables aléatoire de densité

$$f(t) = \frac{1}{t^2}\mathbb{I}_{[1,+\infty[}(t).$$

1) Vérifiez que f est bien une densité de probabilité. La variable aléatoire X est-elle intégrable ?
2) Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et soit $s \in [1, +\infty[$.
a. Montrer que $g(X)\mathbb{I}_{X<x}$ est intégrable. (On pourra d'abord justifier que cette variable aléatoire est bornée)
b. Montrer que

$$\mathbb{E}g(X)\mathbb{I}_{X<x} = \int_1^x \frac{g(t)}{t^2}dt.$$

3) Pour tout $x \geq 1$, calculer les quantités

$$\mathbb{P}(X > x), \quad \mathbb{E}(X\mathbb{I}_{X<x}), \quad \mathbb{E}(X^2\mathbb{I}_{X<x}) \quad \text{et} \quad Var(X\mathbb{I}_{X<x}).$$

/20

Exercice 3

On considère la variable aléatoire X (non constante) et une suite (X_k) de variables aléatoires indépendantes de même loi que X. On suppose de plus que X est de carré intégrable et que

$$\frac{1}{\sqrt{2}}X_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}X_2 \quad \text{a même loi que } X.$$

1) Montrer que nécessairement $\mathbb{E}X = 0$.
2) Expliquer pourquoi

$$T_n = \frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_{k=1}^{2^n} X_k \quad \text{a même loi que } X.$$

3) On pose $\sigma^2 = \mathbb{E}(X^2)$ avec $\sigma > 0$. Montrer que $\sigma^{-1}T_n$ converge en loi et préciser la loi limite. Même question pour T_n.
Quelle est la loi de X ?

Exercice 4

La Journée d'Appel Pour la Défense (JAPD) est l'occasion de mesurer le flux de jeunes en situation d'illetrisme. Chaque jeune Français de 16 ans doit remplir un QCM de 60 questions pour évaluer sa compréhension d'un texte simple.

1) On s'intéresse tout d'abord au nombre moyen d'erreurs dans la population. Sur 200 jeunes tirés au sort, on relève le nombre total d'erreurs :

$$\sum_i x_i = 810 \qquad \sum_i x_i^2 = 8211$$

a) Identifier la population, l'échantillon, la variable mesurée et ses paramètres.
b) Donner une estimation ponctuelle du nombre moyen d'erreurs dans la population.
c) Donner une estimation ponctuelle de l'écart-type du nombre d'erreurs dans la population.
d) Donner une estimation par intervalle de confiance à 90% du nombre moyen d'erreurs dans la popula- tion.

2) Parmi ces 200 jeunes, 21 ont fait plus de douze erreurs, ce qui les caractérise comme ayant "de graves difficultés à la compréhension de la langue écrite".

Donner une estimation par intervalle de confiance à 99% de la proportion de jeunes ayant de graves difficultés.

Durée : 2h – Calculatrices autorisées

Exercice 1

Déterminer dans chacun des cas suivants les optima locaux éventuels de la fonction indiquée sur son ensemble de définition :

$$a)\ f : (x; y) \mapsto x^2y^3\left(1 - \frac{1}{3}x - \frac{1}{2}y\right)$$

$$b)\ g : (x; y; z) \mapsto x^2 + y^2 + z^2 - 2xyz$$

Exercice 2

Déterminer, s'ils existent, le maximum et le minimum du produit des cosinus des angles d'un triangle strict (non aplati).
On observera qu'il s'agit d'un problème d'optimisation sous une contrainte d'égalité que l'on précisera.

Exercice 3

Etudier par deux méthodes l'optimisation de $f : (x; y) \mapsto x + y^3$ sur

$$\Delta = \left\{(x; y) \in \mathbb{R}^2 ; y \geq x^2 ; x \geq 0 \ ; y \leq \sqrt{1 - x^2}\right\}$$